Osnovne definicije i rezultati iz Uvoda u linearnu algebru

(0.01) Simetrije

Neka je $A = [a_{ij}]$ kvadratna matrica (matrica oblika $n \times n$).

a) Za A kažemo da je *simetrična matrica* kadgod je $A = A^\top$, tj. kadgod $a_{ij} = a_{ji}$.

b) Za A kažemo da je *nakrivo-simetrična matrica* kadgod je $A = -A^\top$, tj. kadgod $a_{ij} = -a_{ji}$.

c) Za A kažemo da je *hermitska matrica* kadgod je $A = A^*$, tj. kadgod je $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$. Ovo je kompleksni analog simetričnosti.

d) Za A kažemo da je *nakrivo-hermitska matrica* kadgod je $A = -A^*$, tj. kadgod je $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$. Ovo je kompleksni analog nakrivo-simetričnosti. ◇

(0.02) Dijagonalne i trougaone matrice

a) Matrice oblike $D = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_d \end{bmatrix}$ zovemo *dijagonalne matrice* i često ih označavamo sa $diag(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_d)$.

b) *Glavna dijagonala* kvadratne matrice su elementi koji se nalaze na dijagonalnoj liniji koja počinje u gornjem lijevom uglu matrice a završava u donjem desnom uglu. Za kvadratnu matricu kažemo da je *trougaona matrica* ako su svi elementi iznad glavne dijagonale ili ispod glavne dijagonale jednaki nula. Za kavadratnu matricu kažemo da je *gornje-trougaona matrica* ako su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nula. Za kvadratnu matricu kažemo da je *donje-trougaona matrica* ako su svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki nuli. ◇

(0.03) Inverzna matrica

Za datu kvadratnu matricu $A_{n\times n}$, matricu $B_{n\times n}$ koja zadovoljava uslov

$$AB = I \quad \text{i} \quad BA = I$$

zovemo *inverz* od A i označavamo sa $B = A^{-1}$. Nisu sve kvadratne matrice invertibilne - nula matrica je trivijalni primjer, i postoji veliki broj nenula matrica koje nisu invertibilne. Za invertibilnu matricu kažemo da je *nesingularna*, a za kvadratnu matricu koja nema inverznu matricu kažemo da je *singularna matrica*. ◇

(0.04) Saglasan i nesaglasan sistem

Za sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih kažemo da je *saglasan sistem* ako posjeduje bar jedno rješenje. Ako sistem nema rješenja, tada za sistem kažemo da je *nesaglasan sistem*. ◇

(0.05) Elementarne red (kolona) operacije

Elementarne red (kolona) operacije su:

(i) Zamjena mjesta redova (kolona) i i j.

(ii) Množenje reda (kolone) i sa $\alpha \neq 0$.

(iii) Dodavanje reda (kolone) i pomnožene nekim brojem redu (koloni) j. ◇

(0.06) Ekvivalencija

(i) Kadgod matricu B možemo dobiti iz matrice A kombinacijom elementarnih red ili kolona operacija, pišemo $A \sim B$, i kažemo da su A i B *ekvivalentne* matrice. S obzirom da su elementarne red i kolona operacije u stvari množenje redom sa lijeve i desne strane elementarnim matricama može se dokazati da

$$A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad PAQ = B \text{ za nesingularne } P \text{ i } Q$$

(ii) Kadgod se matrica B može dobiti iz matrice A primjenjujući samo red operacije, pišemo $A \overset{red}{\sim} B$, i kažemo da su matrice A i B <u>*red ekvivalentne*</u>. Drugim riječima

$$A \overset{red}{\sim} B \quad \Leftrightarrow \quad PA = B \text{ za nesingularnu } P.$$

(iii) Kad god se matrica B može dobiti iz matrice A primjenjujući samo niz uzastopnih kolona operacija, pišemo $A \overset{kol}{\sim} B$, i kažemo da su matrice A i B <u>*kolona ekvivalentne*</u>. Drugim riječima

$$A \overset{kol}{\sim} B \quad \Leftrightarrow \quad AQ = B \text{ za nesingularnu } Q.$$

◇

(0.07) Red ešelon oblik

Za $m \times n$ matricu E, sa redovima E_{i*} i kolonama E_{*j}, kažemo da je u red ešelon obliku ako sljedeća dva uslova vrijede:

(a) Ako su svi elementi reda E_{i*} jenaki nuli, tada su i svi elementi u redovima ispod E_{i*} jednaki nuli, tj. svi nula redovi su na dnu matrice.

(b) Ako se prvi nenula elemenat u E_{i*} nalazi na $j$toj poziciji, tada su svi elementi ispod i-te pozicije u kolonama E_{*1}, E_{*2},...,E_{*j} nule.

Ova dva uslova kažu da nenula elementi u ešelon obliku moraju ležati na ili iznad glavne linije stepenica čiji je početak u gornjem lijevom uglu matrice i postepeno pada prema dole desno. Pivoti su prvi nenula elementi u ešelon redovima. Tipična struktura za matricu koja je u red ešelon obliku je ilustrirana ispod, gdje su pivoti zaokruženi.

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

◇

(0.08) Rang matrice

Pretpostavimo da je matrica $A_{m\times n}$ pomoću red operacija svedena na red ešelon oblik E. <u>*Rang*</u> matrice A se definiše kao broj

$$\begin{aligned} rang(A) &= \text{broj pivota} \\ &= \text{broj nenula redova u } E \\ &= \text{broj osnovnih kolona u } A \end{aligned}$$

gdje su <u>*osnovne kolone*</u> od A definisane kao one kolone u A koje sadrže pivot pozicije. ◇

(0.09) Reducirani red ešelon oblik

Za matricu $E_{m\times n}$ kažemo da je u <u>*reduciranom red ešelon obliku*</u> ako su sljedeća tri uslova ispunjena.

(i) E je u red ešelon obliku.

(ii) Prvi nenula elemenat u svakom redu (tj. svaki pivot) je 1.

(iii) Sve vrijednosti iznad svakog pivota su 0.

Tipična struktura za matricu u reduciranom red ešelon obliku je ilustrirana ispod, gdje elementi označeni sa $*$ mogu biti ili nula ili nenula brojevi:

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

◇

(0.10) Saglasnost

Posmatrajmo sistem linearnih jednačina $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Posmatrajmo proširenu matricu oblika $[A|\boldsymbol{b}]$. Svaka od sljedećih tvrdnji je ekvivalentna tvrđenju da je $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ saglasan linearni sistem.

▷ U red redukciji matrice, red sljedećeg oblika se nikad neće pojaviti

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & | & \alpha \end{pmatrix} \text{ gdje je } \alpha \neq 0$$

▷ $\boldsymbol{b}$ nije osnovna kolona matrice $[A|\boldsymbol{b}]$.

▷ $rank[A|\boldsymbol{b}] = rank(A)$.

▷ $\boldsymbol{b}$ je kombinacia osnovnih kolona u A. ◇

(0.11) Sažetak za homogene sisteme

Neka je $A_{m\times n}$ koeficijent matrica za homogeni sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih, i pretpostavimo da je $rang(A) = r$.

(a) Nepoznate koje odgovaraju pozicijama osnovnih kolona (tj. pivot pozicijama) zovemo *osnovne varijable*, a nepoznate koje odgovaraju pozicijama neosnovnih kolona zovemo *slobodne varijable*.

(b) Postoji tačno r osnovnih varijabli i $n - r$ slobodnih varijabli.

(c) Da bi opisali sva riješenja, matricu A reduciramo na red ešelon oblik koristeći Gausovu eliminaciju, i poslije toga vraćamo zamjenu da bi rješenje za osnovne varijable prikazali pomoću slobodnih varijabli. Ovo nam daje *opšte riješenje* koje je u obliku

$$\boldsymbol{x} = x_{f_1}\boldsymbol{h}_1 + x_{f_2}\boldsymbol{h}_2 + ... + x_{f_{n-r}}\boldsymbol{h}_{n-r},$$

gdje su članovi $x_{f_1}, x_{f_2}, ..., x_{f_n}$ slobodne varijable i gdje $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, ..., \boldsymbol{h}_{n-r}$ su $n \times 1$ kolone koje predstavljaju određeno rješenje homogenog sistema. Kolone $\boldsymbol{h}_i$ su nezavisne od red ešelon oblika koji se koristi u procesu zamjene. Kako slobodne varijable x_{f_i} uzimaju sve moguće vrijednosti, opšte rješenje generiše sva moguća rješenja.

(d) Homogeni sistem posjeduje jedinstveno rješenje (trivijalno rješenje) ako i samo ako $rang(A) = n$ - tj., ako i samo ako nema slobodnih varijabli.

◇

(0.12) Sažetak za nehomogeni sistem

Neka je $A_{m\times n}$ koeficijent matrica za nehomogeni sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, neka je $[A|\boldsymbol{b}]$ proširena matrica i pretpostavimo da je $rang(A) = r$.

(a) Svodeći $[A|\boldsymbol{b}]$ na red ešelon oblik, pa koristeći Gausove eliminacije, i na kraju izražavajući osnoven varijable u smislu slobodnih varijabli, (sve ovo) nas vodi prema *opštem rješenju*

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + x_{f_1}\boldsymbol{h}_1 + x_{f_2}\boldsymbol{h}_2 + ... + x_{f_{n-r}}\boldsymbol{h}_{n-r}.$$

Kako slobodne varijable x_{f_i} uzimaju sve moguće vrijednosti, ovo opšte rješenje generiše sva moguća rješenja sistema.

(b) Kolona $\boldsymbol{p}$ je u stvari partikularno rješenje nehomogenog sistema.

(c) Izraz $x_{f_1}\boldsymbol{h}_1 + x_{f_2}\boldsymbol{h}_2 + ... + x_{f_{n-r}}\boldsymbol{h}_{n-r}$ je opšte rješenje pridruženog homogenog sistema.

(d) Kolona $\boldsymbol{p}$, kao i kolona $\boldsymbol{h}_i$ su nezavisne od red ešelon oblika u koji se $[A|\boldsymbol{b}]$ reducira.

(e) Sistem posjeduje jedinstveno rješenje ako i samo ako su sljedeće tvrdnje tačne:

- ▷ $rang(A) = n =$ broj nepoznatih.
- ▷ Ne postoje slobodne varijable.
- ▷ Pridruženi homogeni sistem posjeduje samo trivijalno rješenje. ◇

Vektorski prostori

1. Vektorski prostor i podprostor

(1.01) Definicija vektorskog prostora

Skup $\mathcal{V}$ zovemo *vektorski prostor nad* $\mathbb{F}$ kada operacije vektorsko sabiranje i skalarno množenje zadovoljavaju sljedeće osobine.

(A1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$ za sve $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$. Ovu osobinu zovemo *zatvorenost za vektorsko sabiranje*.

(A2) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ za svaki $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathcal{V}$.

(A3) Postoji element $\mathbf{0} \in \mathcal{V}$ takav da $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$ za svaki $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$.

(A4) Za svaki $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$, postoji element $(-\boldsymbol{x}) \in \mathcal{V}$ takav da $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$.

(A5) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ za svaki $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$.

(Osobine (A1)-(A5) u stvari govore da je uređen par $(\mathcal{V},+)$ Abelova grupa.)

(M1) $\alpha\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ za sve $\alpha \in \mathbb{F}$ i $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$. Ovu osobinu zovemo *zatvorenost za skalarno množenje*.

(M2) $(\alpha\beta)\boldsymbol{x}=\alpha(\beta\boldsymbol{x})$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i svaki $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$.

(M3) $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}$ za svaki $\alpha \in \mathbb{F}$ i sve $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$.

(M4) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i svaki $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$.

(M5) $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ za svaki $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$. ◇

(1.02) Vektorski podprostor

Neka je $\mathcal{S}$ neprazan podskup vektorskog prostora $\mathcal{V}$ nad $\mathbb{F}$ (simbolički, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$). Ako je $\mathcal{S}$ također vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ pod istim operacijama sabiranja i skalarnog množenja, tada za $\mathcal{S}$ kažemo da je *podprostor* od $\mathcal{V}$. Nije potrebno provjeriti svih 10 osobina iz definicije vektorskog prostora da bi odredili da li je dati podskup vektorski podprostor - trebaju se provjeriti jedino osobine zatorenosti (A1) i (M1). Tj. neprazan podskup $\mathcal{S}$ vektorskog prostora $\mathcal{V}$ je podprostor od $\mathcal{V}$ ako i samo ako

(A1) $\quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{S} \Rightarrow \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}$

i

(M1) $\quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{S} \Rightarrow \alpha\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}$ za sve $\alpha \in \mathbb{F}$. ◇

(1.03) Spljoštenost

Iako ne možemo koristiti oči da bi vidjeli "spljoštenost" u višim dimenzijama (u dimenzijama vektorskog prostora većem od 3), naš um to može sebi predstaviti kroz smisao podprostora. Od sad pa nadalje, uvijek zamislite spljoštenu površ koja prolazi kroz koordinatni početak kad god naiđemo na pojam "podprostora". ◇

(1.04) Generatori

(i) Za skup vektora $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_r\}$, podprostor

$$span(\mathcal{S}) = \{\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + ... + \alpha_r \boldsymbol{v}_r : \alpha_i \in \mathbb{F}\}$$

generisan pomoću svih mogućih linearnih kombinacija vektora iz $\mathcal{S}$ zovemo <u>*prostor generisan pomoću* $\mathcal{S}$</u>.

(ii) Ako je $\mathcal{V}$ vektorski prostor takav da $\mathcal{V} = span(\mathcal{S})$, kažemo da je $\mathcal{S}$ generator za $\mathcal{V}$. Drugim riječima $\mathcal{S}$ generiše $\mathcal{V}$ kadgod se svaki vektor iz $\mathcal{V}$ može napisati kao linearna kombinacija vektora iz $\mathcal{S}$. $\diamond$

(1.05) Suma podprostora

Ako su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$, tada je <u>*suma*</u> od $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ definisana kao skup svih mogućih suma vektora iz $\mathcal{X}$ sa vektorima iz $\mathcal{Y}$. Tj.

$$\mathcal{X} + \mathcal{Y} = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \text{ i } \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}\}.$$

(i) Suma $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$ je podprostor od $\mathcal{V}$.

(ii) Ako $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}$, $\mathcal{S}_{\mathcal{Y}}$ generišu redom $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ tada $\mathcal{S}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{S}_{\mathcal{Y}}$ generiše $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$. $\diamond$

(#) Odrediti da li je skup

$$V = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$

vektorski prostor, ako su vektorsko sabiranje i skalarno množenje definisani na sljedeći način:

(VS) $+ :\quad (x,y)+(a,b) = (x+a,\ y+b)$ za $\forall (x,y),(a,b) \in V$

(SM) $\cdot :\quad \alpha(x,y) = (\alpha y, \alpha x)$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in V$.

Rj. Prema definiciji, da bi pokazali da je V vektorski prostor, trebamo pokazati da vrijedi

(A1)-(A5) $(V,+)$ je Abelova grupa

(M1) $\alpha(x,y) \in V$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in V$

(M2) $(\alpha\beta)(x,y) = \alpha(\beta(x,y))$ za $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, (x,y) \in V$

(M3) $\alpha[(x,y)+(a,b)] = \alpha(x,y)+\alpha(a,b)$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x,y),(a,b) \in V$

(M4) $(\alpha+\beta)(x,y) = \alpha(x,y)+\beta(x,y)$ za $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in V$

(M5) $1\cdot(x,y) = (x,y)$ za $\forall$

Pa krenimo redom

(A1) ZATVORENOST $(x,y)+(a,b) \in V$ za $\forall (x,y),(a,b) \in V$

$(x,y)+(a,b) = (\underbrace{x+a}_{\in \mathbb{R}},\ \underbrace{y+b}_{\in \mathbb{R}}) \in V$ vrijedi (A1)

(A2) ASOCIJATIVNOST $\underbrace{[(x,y)+(a,b)]+(m,n) = (x,y)+[(a,b)+(m,n)]}^{\text{za } \forall (a,b),(x,y),(m,n) \in V}$

$[(x,y)+(a,b)]+(m,n) = (x+a,\ y+b)+(m,n) = ((x+a)+m,\ (y+b)+n) =$

$= (x+(a+m),\ y+(b+n)) = (x,y)+(a+m,\ b+n) = (x,y)+[(a,b)+(m,n)]$

vrijedi (A2)

(A3) NEUTRALNI ELEMENT $\exists (e,f) \in V$ t.d. $\overbrace{(e,f)+(x,y) = (x,y)}^{\text{za } \forall (x,y) \in V}$

Prema definiciji vektorskog sabiranja odmah vidimo da je $(e,f) = (0,0)$ neutralni element

(A4) INVERZNI ELEMENT $\forall (x,y) \in V\ \exists (x',y') \in V\ (x,y)+(x',y') = (0,0)$

Nije teško vidjeti da je inverzni element $(x',y') = (-x,-y)$.

(A5) KOMUTATIVNOST $(x,y)+(a,b)=(a,b)+(x,y) \quad \forall (x,y),(a,b)\in V$

$$(x,y)+(a,b)=(x+a,y+b)=(a+x,b+y)=(a,b)+(x,y)$$

vrijedi (A5)

$(V,+)$ jest Abelova grupa

(M1) $\alpha(x,y)\in V$ za $\forall \alpha\in\mathbb{R}, \forall (x,y)\in V$

$\alpha(x,y)=(\underbrace{\alpha y}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{\alpha x}_{\in\mathbb{R}})\in V$ vrijedi (M1)

(M2) $(\alpha\beta)(x,y)=\alpha(\beta(x,y))$ za $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \forall (x,y)\in V$

$$(\alpha\beta)(x,y)=((\alpha\beta)y,(\alpha\beta)x)=(\alpha(\beta y),\alpha(\beta x))=$$

$$=\alpha(\beta x,\beta y)=\alpha(\beta(y,x))$$

Osobina (M2) ne vrijedi

Skup V nije vektorski prostor.

Napomena: Nije teško dokazati da

- skup $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ svih realnih matrica je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$
- skup $Mat_{m\times n}(\mathbb{C})$ svih kompleksnih matrica je vektorski prostor nad $\mathbb{C}$.
- skup $\mathbb{R}^n=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \,\middle|\, x_i\in\mathbb{R}\right\}$ je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$.

Svakom vektorskom prostoru je pridruženo vektorsko sabiranje i skalarno množenje. U sve tri slučaja vektorsko sabiranje se odnosi na uobičajeno sabiranje matrica a skalarno množenje je obično množenje matrice brojem.

Ako sabiranje f-ja i skalarno množenje definirano sa

(VS) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, (SM) $(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$

tada nije teško pokazati da su sljedeći skupovi vektorski prostori nad $\mathbb{R}$

- skup svih f-ja koje preslikavaju interval $[0,1]$ u $\mathbb{R}$;
- skup svih neprekidnih realno vrijednosnih f-ja definisanih na $[0,1]$.

(#) Pokazati da je skup

$$\mathcal{V} = \{(x, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

vektorski prostor ako su vektorsko sabiranje i skalarno množenje definisani na sljedeći način

(VS) $+$: $(x, x, y) + (a, a, c) = (x+a, x+a, y+c)$ $\forall (x,x,y), (a,a,c) \in \mathcal{V}$.

(SM) $\cdot$: $\alpha \cdot (x, x, y) = (\alpha x, \alpha x, \alpha y)$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\forall (x,x,y) \in \mathcal{V}$.

Rj. Da bi pokazali da je $\mathcal{V}$ vektorski prostor, prema definiciji trebamo pokazati da

ovaj zadatak ostavi za vježbu

(A1)-(A5) $(\mathcal{V}, +)$ Abelova grupa

(M1) $\alpha(x,x,y) \in \mathcal{V}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall (x,x,y) \in \mathcal{V}$

(M2) $(\alpha\beta)(x,x,y) = \alpha(\beta(x,x,y))$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\forall (x,x,y) \in \mathcal{V}$

(M3) $\alpha[(x,x,y) + (a,a,b)] = \alpha(x,x,y) + \alpha(a,a,b)$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall (x,x,y), (a,a,b) \in \mathcal{V}$

(M4) $(\alpha+\beta)(x,x,y) = \alpha(x,x,y) + \beta(x,x,y)$ za $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\forall (x,x,y) \in \mathcal{V}$

(M5) $1(x,x,y) = (x,x,y)$ za $\forall (x,x,y) \in \mathcal{V}$

Pa krenimo redom. Pokažimo da je $(\mathcal{V}, +)$ Abelova grupa:

(A1) ZATVORENOST $\forall (x,x,y), (a,a,c) \in \mathcal{V}$ $(x,x,y) + (a,a,c) \in \mathcal{V}$

$$(x,x,y) + (a,a,c) = (\underbrace{x+a}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{x+a}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{y+c}_{\in \mathbb{R}}) \in \mathcal{V}$$

(prva i druga koordinata su iste) vrijedi zatvorenost

(A2) ASOCIJATIVNOST $\forall (x,x,y), (a,a,c), (m,m,n) \in \mathcal{V}$ $[(x,x,y) + (a,a,c)] + (m,m,n) = (x,x,y) + [(a,a,c) + (m,m,n)]$

$$[(x,x,y) + (a,a,c)] + (m,m,n) = (x+a, x+a, y+c) + (m,m,n) =$$

$$= ((x+a)+m, (x+a)+m, (y+c)+n) = (x+(a+m), x+(a+m), y+(c+n)) =$$

$$= (x,x,y) + (a+m, a+m, c+n) = (x,x,y) + [(a,a,c) + (m,m,n)]$$

vrijedi asocijativnost

(A3) NEUTRALNI ELEMENT $\exists (e,e,f) \in \mathcal{V}$ t.d. $(x,x,y) + (e,e,f) = (x,x,y)$

Odnah se vidi da je $(e,e,f) = (0,0,0)$ neutralni element. za $\forall (x,x,y) \in \mathcal{V}$

(A4) INVERZNI ELEMENT $\forall (x,x,y)\in V \ \exists (x',x',y')\in V$ t.d. $(x,x,y)+(x',x',y')=$
$=(0,0,0)$

Iz definicije vektorskog sabiranja odmah vidimo da je $(x',x',y')=(-x,-x,-y)$ inverzni element za (x,x,y)

(A5) KOMUTATIVNOST $\forall (x,x,y),(a,a,c)\in V \quad (x,x,y)+(a,a,c)=(a,a,c)+(x,x,y)$

$$(x,x,y)+(a,a,c)=(x+a,x+a,y+c)=(a+x,a+x,c+y)=(a,a,c)+(x,x,y)$$

vrijedi komutativnost

Prema tome $(V,+)$ jest Abelova grupa

(M1) ZATVORENOST SKALARNOG MNOŽENJA $\alpha(x,x,y)\in V \ \forall \alpha\in\mathbb{R} \ \forall (x,x,y)\in V$

$$\alpha(x,x,y)=(\underbrace{\alpha x}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{\alpha x}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{\alpha y}_{\in\mathbb{R}})\in V$$ (prva i druga koordinata su jednake)

vrijedi (M1)

(M2) $(\alpha\beta)(x,x,y)=\alpha(\beta(x,x,y)) \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R} \ \forall (x,x,y)\in V$

$$(\alpha\beta)(x,x,y)=((\alpha\beta)x,(\alpha\beta)x,(\alpha\beta)y)=(\alpha(\beta x),\alpha(\beta x),\alpha(\beta y))=$$
$$=\alpha(\beta x,\beta x,\beta y)=\alpha(\beta(x,y,z))$$ vrijedi (M2)

(M3) PRVI DISTRIBUTIVNI ZAKON $\alpha[(x,x,y)+(a,a,c)]=\alpha(x,x,y)+\alpha(a,a,c)$
za $\forall \alpha\in\mathbb{R} \ \forall (x,x,y),(a,a,c)\in V$

$$\alpha[(x,x,y)+(a,a,c)]=\alpha(x+a,x+a,y+c)=(\alpha(x+a),\alpha(x+a),\alpha(y+c))=$$
$$=(\alpha x+\alpha a,\alpha x+\alpha a,\alpha y+\alpha c)=(\alpha x,\alpha x,\alpha y)+(\alpha a,\alpha a,\alpha c)$$
$$=\alpha(x,x,y)+\alpha(a,a,c)$$ vrijedi (M3)

(M4) DRUGI DISTRIBUTIVNI ZAKON $(\alpha+\beta)(x,x,y)=\alpha(x,x,y)+\beta(x,x,y)$
za $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \ \forall (x,x,y)\in V$

za vježbu pokazati da vrijedi (M4)

(M5) $1(x,x,y)=(x,x,y) \quad \forall (x,x,y)\in V$

$$1(x,x,y)=(1\cdot x,1\cdot x,1\cdot y)=(x,x,y)$$ vrijedi (M5).

Prema tome V jest vektorski prostor.

Zašto realan ili kompleksan nenula vektorski prostor mora sadržavati beskonačan broj vektora?

Rj: Ako je $v \in V$ nenula vektor u vektorskom prostoru V, tada svako skalarno množenje αv pripada prostoru V. Kako je $\alpha \in \mathbb{R}$ (ili $\alpha \in \mathbb{C}$) to V mora imati beskonačno mnogo vektova.

Da li su sljedeći skupovi, sa prikazanim operacijama, vektorski prostori? Ako nisu, zašto nisu?

a) Skup $\mathbb{R}_0^+$ nenegativnih realnih brojeva, sa uobičajenim sabiranjem i skalarnim množenjem.

b) Skup V svih polinoma stepena ≥ 3, zajedno sa 0; operacije sa polinomima (uobičajeno sabiranje polinoma, i množenje polinoma skalarom).

c) Skup V svih 2×2 matrica oblika $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$, gdje su operacije iz $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

d) Skup V svih 2×2 matrica sa jednakom sumom elemenata u koloni; operacije iz $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

e) Skup V svih 2×2 matrica sa determinantom jednakoj 0; uobičajene matrične operacije

f) Skup V realnih brojeva; uobičajene operacije.

g) Skup V svih uređenih parova (x,y) sa sabiranjem na $\mathbb{R}^2$, ali skalarnim množenjem $\alpha(x,y)=(x,y)$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

h) Skup V svih f-ja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sa tačkastim sabiranjem $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall f,g$ i skalarnim množenjem koje je definisano sa $(\alpha f)(x) = f(\alpha x)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ i $\forall x \in \mathbb{R}$.

IZABRANI ODGOVORI: b) NE, samo (A1) nije ispunjen d) DA f) DA j) NE, samo (S3) nije ispunjen

(#) Pokazati da je skup $\mathcal{U} = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^2$.

Rj.

Prema definiciji vektorskog podprostora $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ je vektorski podprostor akko je $\mathcal{U}$ neprazan skup i vrijedi

(A1) $(x, -x), (a, -a) \in \mathcal{U} \Rightarrow (x, -x) + (a, -a) \in \mathcal{U}$

(M1) $(x, -x) \in \mathcal{U} \Rightarrow \alpha(x, -x) \in \mathcal{U}$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\mathcal{U}$ je neprazan, zato što npr $(0, 0) \in \mathcal{U}$

(A1) vrijedi zato što

$$(x, -x) + (a, -a) = (x + a, -x - a) = (\underbrace{x+a}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{-(x+a)}_{\in \mathbb{R}}) \in \mathcal{U}$$

Kako je

$$\alpha(x, -x) = (\underbrace{\alpha x}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{-\alpha x}_{\in \mathbb{R}}) \in \mathcal{U}$$ to vrijedi i osobina (M1).

$\mathcal{U}$ je vektorski prostor prostora $\mathbb{R}^2$

(#) Neka je $\mathcal{V}$ proizvoljan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Pokazati da je $\mathcal{U} = \{\mathbf{0}\}$ podprostor od $\mathcal{V}$.

Rj.

$\mathcal{U}$ je neprazan $(\mathbf{0} \in \mathcal{U})$

(A1) $x, y \in \mathcal{U} \Rightarrow x + y \in \mathcal{U}$

Ako izaberemo proizvoljne $x, y \in \mathcal{U}$ ovi x i y moraju biti 0

$0 + 0 = 0 \in \mathcal{U}$ vrijedi (A1)

(M1) $x \in \mathcal{U} \Rightarrow \alpha x \in \mathcal{U}$ $\forall \alpha \in \mathbb{F}$

Za proizvoljno $x \in \mathcal{U}$ ovaj x mora biti $\mathbf{0}$.

$\alpha 0 = 0$ vrijedi M1

$\{\mathbf{0}\}$ je vektorski podprostor prostora $\mathcal{V}$

Neka je A $m \times n$ matrica. Posmatrajmo skup

$$\mathcal{U} = \left\{ Ax \mid x \in \mathbb{R}^n, \ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\}.$$

Pokazati da je $\mathcal{U}$ vektorski podprostor od $\mathbb{R}^m$ (skup $\mathcal{U}$ zovemo rang matrice A)

Rj. Prema definiciji da bi pokazali da je $\mathcal{U}$ vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^m$ trebamo pokazati da je $\mathcal{U}$ neprazan skup i da vrijede osobine

(A1) $Ax, Ay \in \mathcal{U} \Rightarrow Ax + Ay \in \mathcal{U}$

(M1) $Ax \Rightarrow \alpha Ax \in \mathcal{U}$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Primjetimo da

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \vdots \\ \square \end{bmatrix}_{m \times 1} \in \mathbb{R}^m$$

Ako za x uzmemo vektor $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tada $A0 = 0$ pa skup $\mathcal{U}$ nije prazan.

Pokažimo (A1)

$$Ax, Ay \in \mathcal{U} \Rightarrow Ax + Ay = A\underbrace{(x+y)}_{=z} = Az \in \mathcal{U}$$

vrijedi (A1)

Pokažimo (M1)

$$Ax \in \mathcal{U} \Rightarrow \alpha Ax = A(\alpha x) = A\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}}_{=w} = Aw \in \mathcal{U}$$

vrijedi (A2)

$\mathcal{U}$ je vektorski podprostor od $\mathbb{R}^m$

(#) Dat je vektorski prostor $P[x]$, prostor svih polinoma $p(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$, $a_i\in\mathbb{R}$, proizvoljnog stepena. Posmatrajmo podskup $\mathcal{U}$ skupa svih polinoma iz $P[x]$ koji ima 3 kao korijen

$$\mathcal{U}=\{p(x)\in P[x] \mid p(3)=0\}.$$

Pokazati da je $\mathcal{U}$ vektorski podprostor prostora $P[x]$.

Rj. Prema definiciji, da bi dokazali da je $\mathcal{U}$ vektorski podprostor prostora $P[x]$ trebamo dokazati da je $\mathcal{U}$ neprazan skup i da vrijedi

(A1) $p(x), g(x)\in\mathcal{U} \Rightarrow (p+g)(x)\in\mathcal{U}$

(M1) $p(x)\in\mathcal{U} \Rightarrow \alpha p(x)\in\mathcal{U} \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Polinom $p(x)=x-3$ pripada skupu $\mathcal{U}$ zato što je $p(3)=0$ pa $\mathcal{U}$ nije prazan.

Pokažimo (A1)

$p(x), g(x)\in\mathcal{U} \Rightarrow p(3)=0$ i $g(3)=0$

$(p+g)(0)=p(0)+g(0)=0+0=0 \Rightarrow$ vrijedi (A1)

Pokažimo (M1)

$p(x)\in\mathcal{U}\Rightarrow p(3)=0$

$\alpha p(0)=\alpha\cdot 0=0 \Rightarrow \alpha p(x)\in\mathcal{U}$

vrijedi (M1)

$\mathcal{U}$ je vektorski podprostor prostora $P[x]$.

(#) Dat je skup $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ na kojem je definisano vektorsko sabiranje $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$ i skalarno množenje $\forall x \in \mathbb{R}^n \; \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$. Od ranije je poznato da je $\mathbb{R}^n$ vektorski prostor. Diskutovati koji od sljedećih podskupova od $\mathbb{R}^n$ su u stvari vektorski podprostori od $\mathbb{R}^n$ $(n>2)$.

a) $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0\}$

b) $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$

c) $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 x_2 = 0\}$

d) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$

e) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$

f) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b$, gdje je A nenula matrica oblika $m \times n$ i b nenula matrica oblika $m \times 1\}$

Rj. Znamo da je neprazan podskup $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ podprostor vektorskog prostora $\mathcal{V}$ akko

(A1) $x, y \in \mathcal{S} \Rightarrow x+y \in \mathcal{S}$

(M1) $x \in \mathcal{S} \Rightarrow \alpha x \in \mathcal{S} \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}$

Odmah primjetimo da je svaki od datih skupova neprazan pa to nećemo ispitivati.

a) $x, y \in \mathcal{A} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{matrix}\right\} \Rightarrow x+y = (\underbrace{x_1+y_1}_{\geq 0}, \underbrace{x_2+y_2}_{\geq 0}, \dots, \underbrace{x_n+y_n}_{\geq 0}) \Rightarrow x+y \in \mathcal{A}$

vrijedi (A1)

$x \in \mathcal{A} \Rightarrow x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$-1 \in \mathbb{R} \quad (-1)(x) = (\underbrace{-x_1}_{\leq 0}, \underbrace{-x_2}_{\leq 0}, \dots, \underbrace{-x_n}_{\leq 0}) \Rightarrow -x \notin \mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ nije vektorski podprostor

b) $x, y \in \mathcal{B} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{matrix}\right\} \Rightarrow x+y = (0+0, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow x+y \in \mathcal{B}$

vrijedi (A1)

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) = (0, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \Rightarrow \alpha x \in \mathcal{B} \Rightarrow$ vrijedi (M1)

$\mathcal{B}$ jest vektorski podprostor

c) $x, y \in \mathcal{C} \Rightarrow x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$ gdje $x_1x_2=0$ i $y_1y_2=0$

$$(x_1+y_1)\cdot(x_2+y_2) = \underbrace{x_1x_2}_{=0} + \underbrace{x_1y_2+y_1x_2}_{=?} + \underbrace{y_1y_2}_{=0}$$ ne vrijedi (A1)

$\mathcal{C}$ nije vektorski podprostor

d) $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$

$x, y \in \mathcal{D} \Rightarrow x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$ gdje $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ i $\sum_{i=1}^{n} y_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i = 0+0=0$$ vrijedi (A1)

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ vrijedi (M1)

$\mathcal{D}$ jest vektorski podprostor

e) $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$

$x, y \in \mathcal{E} \Rightarrow x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$ gdje $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i = 1+1=2$$ ne vrijedi (A1)

$\mathcal{E}$ nije vektorski podprostor

f) $\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax=b$, A i b odgovarajuće matrice$\}$
za koje sistem ima rješenje

$x, y \in \mathcal{F} \Rightarrow \begin{matrix} Ax=b \\ Ay=b \end{matrix}$ ali $A(x+y) = Ax + Ay = b+b = 2b$

$$x+y \notin \mathcal{F}$$

$\mathcal{F}$ nije vektorski podprostor

(7) Odrediti koji od sljedećih podskupova od $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ su u stvari podprostori od $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$.

a) simetrične matrice
b) dijagonalne matrice
c) nesingularne matrice
d) singularne matrice
e) trougaone matrice
f) gornje-trougaone matrice
g) sve matrice koje komutiraju sa datom matricom A
h) sve matrice kod kojih je $A^2=A$
i) sve matrice kod kojih je $trag(A)=0$.

Rj. Za sve date slučajeve trebamo ispitati aksiome (A1) i (M1) (iz same definicije primjetimo da je svaki dati skup neprazan, pa to nećemo ispitivati)

a) simetrične matrice

A simetrična matrica akko $A=A^T$

A,B simetrične matrice $\Rightarrow A^T=A,\ B^T=B \Rightarrow A+B=A^T+B^T=(A+B)^T$

$\Rightarrow A+B$ je simetrična matrica (vrijedi A1).

A simetrična matrica $\Rightarrow A^T=A \Rightarrow \alpha A=\alpha A^T \quad \forall \alpha\in\mathbb{F}$

$\Rightarrow \alpha A$ je simetrična matrica (vrijedi M1)

Skup svih simetričnih matrica formiraju podprostor vektorskog prostora $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$.

b) dijagonalne matrice

A dijagonalna matrica akko svi elementi koji se ne nalaze na glavnoj dijagonali su jednaki 0

A,B dijagonalne matrice $\Rightarrow A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & b_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A+B$ dijagonalna matrica (vrijedi A1)

A dijagonalna $\Rightarrow \alpha A=\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \alpha a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha a_{nn}\end{bmatrix} \Rightarrow \alpha A$ dijagonalna (vrijedi M1)

Skup svih dijagonalnih matrica čine vektorski podprostor prostora $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$.

c) nesingularne matrice $\qquad \exists$ inverzna matrica A^{-1}

A je nesingularna matrica akko $(\det(A) \neq 0)$

Ako npr. uzmemo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ tada

$\det(A) \neq 0$, $\det(B) \neq 0$ ali $\det(A+B) = 0$

ne vrijedi A1

Skup svih singularnih matrica nije vektorski podprostor.

d) singularne matrice $\qquad$ ne postoji inverzna matrica

A singularna matrica akko $(\det(A) = 0)$.

Ako npr. uzmemo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ imamo

$\det(A) = 0$, $\det(B) = 0$ ali $\det(A+B) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$

ne vrijedi A1

Skup svih singularnih matrica ne formiraju vektorski podprostor.

e) trougaone matrice

A trougaona matrica akko elementi matrice iznad ili ispod glavne dijagonale su jednaki nuli.

Ako npr uzmemo

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ tada A i B su trougaone ali A+B nije trougaona matrica

aksiom A1 ne vrijedi

Skup svih trougaonih matrica ne čini vektorski podprostor.

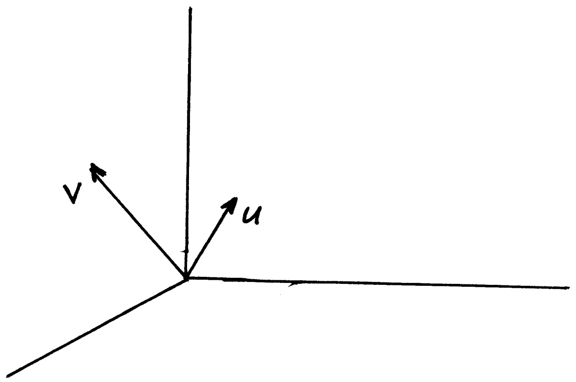
f) gornje-trougaona matrica

A gornje-trougaona matrica akko svi elementi ispod glavne dijagonale su jednaki nuli.

Završiti za vježbu

f) JEST $\qquad$ g) JEST $\qquad$ h) NIJE $\qquad$ i) JEST

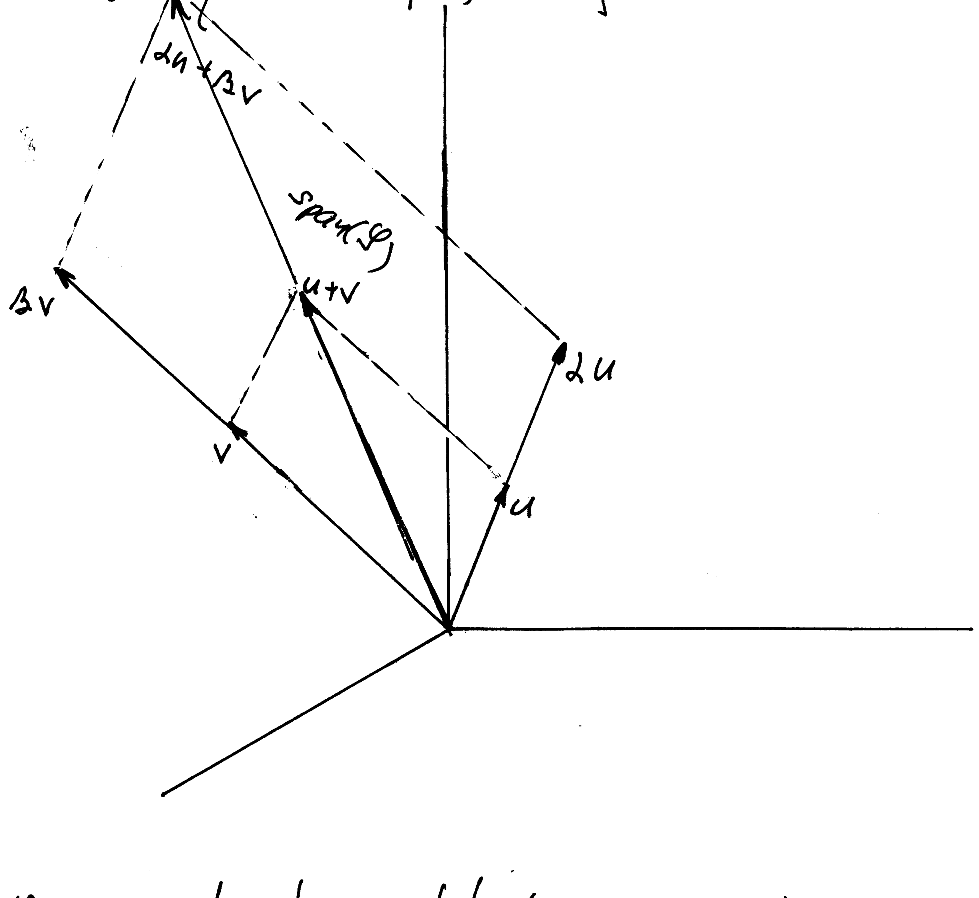
#) Dat je skup $S=\{u,v\}$, koji sadrži dva vektora u i v, u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ (vidi sliku)



Šta geometrijski predstavlja $\operatorname{span}(S)$?

Rj.

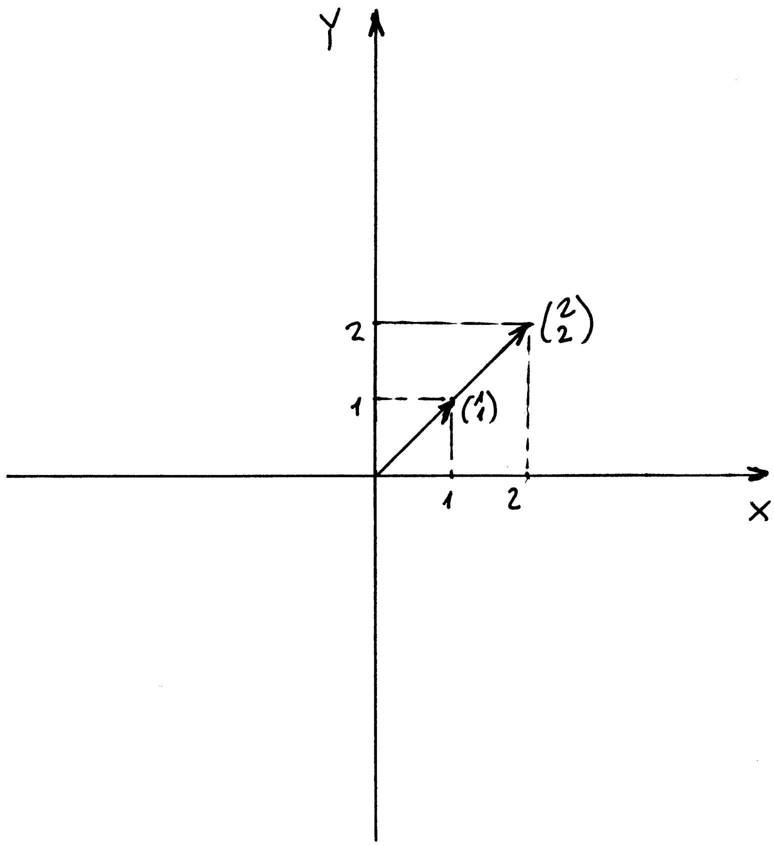
$\operatorname{span}(S) = \{\alpha u + \beta v \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$



$\operatorname{span}(S)$ geometrijski predstavlja ravan koja sadrži vektore u i v i koja prolazi kroz koordinatni početak.

(#) Dat je skup $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^2$. Šta geometrijski predstavlja $\operatorname{span}(\mathcal{S})$?

Rj.



$$\operatorname{span}(\mathcal{S}) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta \\ 2\beta \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta \\ \alpha + 2\beta \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left| \begin{matrix} \alpha + 2\beta = \gamma \\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \gamma \in \mathbb{R} \end{matrix} \right| =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} \,\middle|\, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

$\operatorname{span}(\mathcal{S})$ predstavlja pravu $y = x$ u $\mathbb{R}^2$.

(#) Obrazložiti odgovore na sljedeća pitanja

a) Šta predstavlja span $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$?

b) Šta predstavlja span $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ gdje su e_i jedinični vektori iz $\mathbb{R}^n$ $\left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ta poz.}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

c) Šta predstavljaju span$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ i span$\{1, x, x^2, \dots\}$.

Rj.

a)

$$\text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^3 .$$

b)

$$\text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \{ \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n \mid \alpha_i \in \mathbb{R} \} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha_i \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^n$$

c)

$$\text{span}\{1, x, x^2, \dots, x^n\} =$$

$$= \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \}$$ = skup svih polinoma $p(x)$ stepena $\leq n$

$$\text{span}\{1, x, x^2, \dots\} = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \mid a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R} \}$$ = skup svih polinoma

(#) Obrazložiti odgovor na pitanje da li skup $\mathcal{S} = \{(1,1,1), (1,-1,-1), (3,1,1)\}$ generiše vektorski prostor $\mathbb{R}^3$.

Rj.

Postavimo vektore iz skupa $\mathcal{S}$ kao vektor kolone tj.

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\operatorname{span} \mathcal{S} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

$\mathcal{S}$ će generisati vektorski prostor $\mathbb{R}^3$ akko $\operatorname{span} \mathcal{S} = \mathbb{R}^3$ tj. ako se svaki vektor $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ može napisati kao linearna kombinacija vektora iz $\mathcal{S}$.

Ako vektore iz $\mathcal{S}$-a postavimo kao kolone matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{kako je} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \gamma$$

to možemo zaključiti

$\mathcal{S}$ generiše $\mathbb{R}^3$ akko $Ax = b$ ima rješenje za $\forall b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Iz osnovne teorije linearne algebre

$Ax = b$ ima rješenje akko $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A \mid b)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{III_v + II_v \cdot (-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{II_v + I_v \cdot (-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 2$. Kako je b proizvoljan vektor $\operatorname{rang}(A \mid b) = 3$
$\Rightarrow$ sistem nema rješenje

Prema tome $\mathcal{S}$ ne generiše vektorski prostor $\mathbb{R}^3$.

(#) Koji od sljedećih skupova generišu (granaju) $\mathbb{R}^3$?

a) $\{(1,1,1)\}$

b) $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$

c) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$

d) $\{(1,2,1),(2,0,-1),(4,4,1)\}$

e) $\{(1,2,1),(2,0,-1),(4,4,0)\}$

Rj.
$$\mathbb{R}^3=\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3 \mid \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}=\{(\alpha,\beta,\gamma)\mid\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}$$
$$=\{\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)+\gamma(0,0,1)\mid\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}$$

a) $\mathcal{A}=\{(1,1,1)\}$
$$\operatorname{span}\mathcal{A}=\{\alpha(1,1,1)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}=\{(\alpha,\alpha,\alpha)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$$
$\mathcal{A}$ ne grana $\mathbb{R}^3$ npr. $(1,2,3)\notin\mathcal{A}$

b) $\mathcal{B}=\{(1,0,0),(0,0,1)\}$
$$\operatorname{span}\mathcal{B}=\{\alpha(1,0,0)+\beta(0,0,1)\mid\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=\{(\alpha,0,\beta)\mid\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$$
$\mathcal{B}$ ne grana $\mathbb{R}^3$ npr. $(2,2,2)\notin\mathcal{B}$

c) $\mathcal{C}=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$
$$\operatorname{span}\mathcal{C}=\{\underbrace{\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)+\gamma(0,0,1)}_{=\mathbb{R}^3}+\delta\cdot(1,1,1)\mid\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}\}$$
$$=\{(\alpha+\delta,\beta+\delta,\gamma+\delta)\mid\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}\}=\{(\eta,\mu,\theta)\mid\eta,\mu,\theta\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^3$$
$\mathcal{C}$ grana $\mathbb{R}^3$

d) Ako vektore iz skupa $\mathcal{D}=\{(1,2,1),(2,0,-1),(4,4,1)\}$ stavimo kao kolone matrice A tada se pitanje da li $\mathcal{D}$ grana vektorski prostor $\mathbb{R}^3$ svodi na pitanje da li sistem $Ax=b$

ima bar jedno rješenje za $\forall b \in \mathbb{R}^3$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zašto?

$\mathcal{D}$ grana $\mathbb{R}^3$ akko $\mathbb{R}^3 = \operatorname{span} \mathcal{D}$ akko

$\forall b \in \mathbb{R}^3 \ \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ t.d.

$$b = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = Ax$$

Iz osnovne teorije linearne algebre sistem linearnih jednačina $Ax = b$ je saglasan sistem akko $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A \,|\, b)$.

Izračunajmo $\operatorname{rang} A$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{III_v + I_v \cdot (-1)}{\overset{II_v + I_v \cdot (-2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \underset{III_v : (-4)}{\overset{II_v : (-4)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{III_v - II_v}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\operatorname{rang}(A) = 2$. Kako je b proizvoljan $\operatorname{rang}(A \,|\, b) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ sistem $Ax = b$ nije saglasan $\Rightarrow \mathcal{D}$ ne generiše $\mathbb{R}^3$

e) $\mathcal{E} = \{(1,2,1), (2,0,-1), (4,4,0)\}$

Ako vektore iz $\mathcal{E}$ stavimo kao kolone matrice B prema primjedbi iz d) imamo

$\operatorname{span} \mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ akko sistem $Bx = b$ je saglasan sistem

gdje je $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{I_k - II_k}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 8 = 4 \neq 0$$

$\mathcal{E}$ grana $\mathbb{R}^3$

(#) Za dati skup vektora $\mathcal{S}=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ iz podprostora $V\subseteq\mathbb{R}^m$ neka je A matrica koja sadrži vektore a_i kao svoje kolone. Objasniti zašto $\mathcal{S}$ generiše V ako i samo ako za $\forall b\in V$ postoji odgovarajuća kolona x takva da $Ax=b$ (tj. ako i samo ako $Ax=b$ je saglasan sistem za svako $b\in V$).

Rj.

Prisjetimo se

$$\operatorname{span}\mathcal{S} \overset{\text{def}}{=} \{\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\dots+\alpha_n a_n \mid \alpha_i\in\mathbb{F}\}$$

"⇒" $\mathcal{S}$ grana V $\Rightarrow$ $V=\operatorname{span}\mathcal{S}$ $\Rightarrow$ $\operatorname{span}\{a_1,a_2,\dots,a_n\}=V \Rightarrow \{\alpha_1 a_1+\dots+\alpha_n a_n \mid \alpha_i\in\mathbb{R}\}=V$ $\Rightarrow$ $\forall b\in V\ \exists \alpha_i\in\mathbb{F}$ t.d.

$$b=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\dots+\alpha_n a_n=\underbrace{(a_1\,|\,a_2\,|\dots|\,a_n)}_{=A}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ sistem $Ax=b$ ima rješenje za $\forall b\in V$ (rješenje je $x=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$)

"⇐" Pretpostavimo da sistem $Ax=b$ ima rješenje za $\forall b\in V$ tj. za $\forall b\in V$ $\exists x=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n$ t.d. $A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=b$

$$Ax=(a_1\,|\,a_2\,|\dots|\,a_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\dots+\alpha_n a_n=b$$

$\Rightarrow$ $b\in\operatorname{span}\mathcal{S}$ $\xRightarrow{\text{kako je } b \text{ proizvoljno}}$ $V=\operatorname{span}\mathcal{S}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{S}$ generiše (grana) V

($\mathcal{S}$ je generator od V)

(#) Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$, i neka je

$$\mathcal{X}+\mathcal{Y}=\{x+y \mid x\in\mathcal{X} \text{ i } y\in\mathcal{Y}\}.$$

Pokazati da je $\mathcal{X}+\mathcal{Y}$ podprostor vektorskog prostora $\mathcal{V}$.

Rj. Označimo sa $\mathcal{S}=\mathcal{X}+\mathcal{Y}$ i pokažimo da $\mathcal{S}$ je $\mathcal{S}$ neprazan (za vježbu) i da zadovoljava osobine (A1) i (M1) iz definicije vektorskog podprostora.

(A1) $u,v\in\mathcal{S} \Rightarrow u+v\in\mathcal{S}$

$u\in\mathcal{S} \Rightarrow u=x_1+y_1$ gdje $x_1\in\mathcal{X}$, $y_1\in\mathcal{Y}$

$v\in\mathcal{S} \Rightarrow v=x_2+y_2$ gdje $x_2\in\mathcal{X}$, $y_2\in\mathcal{Y}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ su zatvoreni u odnosu na sabiranje

$$u+v=\underbrace{(x_1+x_2)}_{\in\mathcal{X}}+\underbrace{(y_1+y_2)}_{\in\mathcal{Y}}\in\mathcal{S}$$ osobina (A1) je zadovoljena

(M1) $u\in\mathcal{S} \Rightarrow \alpha u\in\mathcal{S}$ za $\forall\alpha\in\mathbb{F}$

oba prostora $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ su zatvoreni u odnosu na skalarno množenje pa je $\alpha x_1\in\mathcal{X}$ i $\alpha y_1\in\mathcal{Y}$ za $\forall\alpha$

$$\alpha u=\alpha(x_1+y_1)=\underbrace{\alpha x_1}_{\in\mathcal{X}}+\underbrace{\alpha y_1}_{\in\mathcal{Y}}\in\mathcal{S} \quad \forall\alpha\in\mathbb{F}$$

osobina (M1) je zadovoljena

$\Rightarrow$ $\mathcal{X}+\mathcal{Y}$ je podprostor vektorskog prostora $\mathcal{V}$

(#) Za $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ i $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$, neka je $A(\mathcal{S}) = \{Ax \mid x \in \mathcal{S}\}$ skup koji sadrži svemoguće proizvode matrice A sa vektorima iz $\mathcal{S}$. Skup $A(\mathcal{S})$ zovemo slika od $\mathcal{S}$ pod A.

(a) Ako je $\mathcal{S}$ podpractor od $\mathbb{R}^n$, dokazati da je $A(\mathcal{S})$ podpractor od $\mathbb{R}^m$.

(b) Ako $s_1, s_2, \dots, s_k$ generišu $\mathcal{S}$, pokazati da $As_1, As_2, \dots, As_k$ generišu $A(\mathcal{S})$.

Rj (a) Prema definiciji $A(\mathcal{S})$ je podpractor od $\mathbb{R}^m$ ako je $A(\mathcal{S})$ neprazan skup i ako vrijede sljedeća dva uslova

(A1) $Ax, Ay \in A(\mathcal{S}) \Rightarrow Ax + Ay \in A(\mathcal{S})$

(M1) $Ax \in A(\mathcal{S}) \Rightarrow \alpha Ax \in A(\mathcal{S})$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Pokažimo (A1):

$$Ax, Ay \in A(\mathcal{S}) \Rightarrow Ax + Ay = A\underbrace{(x+y)}_{\in \mathcal{S}} \in A(\mathcal{S}) \subseteq \mathbb{R}^m \quad \text{vrijedi A1.}$$

Pokažimo (M1): (zato što je $\mathcal{S}$ podpractor od $\mathbb{R}^n$)

$$Ax \in A(\mathcal{S}) \Rightarrow \alpha Ax = A\underbrace{(\alpha x)}_{\in \mathcal{S}} \Rightarrow A\underbrace{(\alpha x)}_{\in \mathcal{S}} \in A(\mathcal{S}) \quad \text{vrijedi M1}$$

$A(\mathcal{S})$ je podpractor od $\mathbb{R}^m$

(b) $\mathcal{S} = span\{s_1, s_2, \dots, s_k\} \Rightarrow A(\mathcal{S}) = span\{As_1, As_2, \dots, As_k\}$.

Da bi pokazali da $A(\mathcal{S}) = span\{As_1, As_2, \dots, As_k\}$ mi ćemo u stvari pokazati da $span\{As_1, As_2, \dots, As_k\} \subseteq A(\mathcal{S})$ ... (1)

i $A(\mathcal{S}) \subseteq span\{As_1, As_2, \dots, As_k\}$ ... (2)

Pokažimo (1): Izaberimo proizvoljno $x \in span\{As_1, As_2, \dots, As_k\}$

$\Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ t.d. $x = \alpha_1 As_1 + \alpha_2 As_2 + \dots + \alpha_n As_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = A\underbrace{(\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \dots + \alpha_n s_n)}_{\in \mathcal{S} \text{ (zato što } \mathcal{S} = span\{s_1, s_2, \dots, s_k\})} \in A(\mathcal{S}) \Rightarrow \text{vrijedi (1)}$$

Pokažimo (2): Izaberimo proizvoljno $Ax \in A(\mathcal{S}) \Rightarrow x \in \mathcal{S} \Rightarrow$

$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ t.d. $x = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \dots + \alpha_n s_n \Rightarrow Ax = A(\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \dots + \alpha_n s_n)$

$\Rightarrow Ax = \alpha_1 As_1 + \alpha_2 As_2 + \dots + \alpha_n As_n \in span\{As_1, As_2, \dots, As_n\} \Rightarrow$ vrijedi (2)

Prema tome $A(\mathcal{S}) = span\{As_1, As_2, \dots, As_k\}$ q.e.d.

(#) Neka su $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq \mathcal{V}$ vektorski podprostori postora $\mathcal{V}$.
Objasniti zašto je $span(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) = span(\mathcal{M}) + span(\mathcal{N})$.

Rj. Želimo pokazati da je $span(\mathcal{M}) + span(\mathcal{N}) \subseteq span(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})$
i da je $span(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) \subseteq span(\mathcal{M}) + span(\mathcal{N})$.

Neka je $\mathcal{M} \overset{span}{=} \{m_1, m_2, \dots, m_r\}$ i $\mathcal{N} \overset{span}{=} \{n_1, n_2, \dots, n_t\}$.

Prvo pokažimo da je $span(\mathcal{M}) + span(\mathcal{N}) \subseteq span(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})$.
Izaberimo proizvoljno $z \in span(\mathcal{M}) + span(\mathcal{N}) \Rightarrow$

$\Rightarrow z = x + y$ gdje je $x \in span(\mathcal{M})$, a $y \in span(\mathcal{N})$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$\exists \alpha_i \in \mathbb{F}$ t.d. $x = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i m_i$ $\qquad$ $\exists \beta_j \in \mathbb{F}$ t.d. $y = \sum_{j=1}^{t} \beta_j n_j$

$$\Rightarrow \exists \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{F} \quad z = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i m_i + \sum_{j=1}^{t} \beta_j n_j \Rightarrow z \in span\{m_1, \dots, m_r, n_1, \dots, n_t\}$$

$\Rightarrow z \in span(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})$ tj. $span(\mathcal{M}) + span(\mathcal{N}) \subseteq span(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})$ ...(*)

Pokažimo sad da je $span(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) \subseteq span(\mathcal{M}) + span(\mathcal{N})$
Izaberimo proizvoljno $z \in span(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) \Rightarrow$

$\Rightarrow z \in span\{m_1, \dots, m_r, n_1, \dots, n_t\} \Rightarrow \exists \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{F}$ t.d.

$$z = \alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_r m_r + \beta_1 n_1 + \dots + \beta_t n_t \Rightarrow$$

$\Rightarrow z = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i m_i + \sum_{j=1}^{t} \beta_j n_j \Rightarrow z = x + y$ gdje $x \in span\,\mathcal{M}$, $y \in span\,\mathcal{N}$

$\Rightarrow z \in span\,\mathcal{M} + span\,\mathcal{N}$ tj. $span(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) \subseteq span\,\mathcal{M} + span\,\mathcal{N}$ ...(**)

(*) i (**) $\Rightarrow$ $span(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) = span(\mathcal{M}) \cup span\,\mathcal{N}$ q.e.d.

(#) Ako skupovi $\mathcal{S}_\mathcal{X}$ i $\mathcal{S}_\mathcal{Y}$ generišu redom vektorske podprostore $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ prostora $\mathcal{V}$, pokazati da tada $\mathcal{S}_\mathcal{X} \cup \mathcal{S}_\mathcal{Y}$ generiše $\mathcal{X}+\mathcal{Y} = \{x+y \mid x \in \mathcal{X} \text{ i } y \in \mathcal{Y}\}$.

Rj: Neka je $\mathcal{S}_\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$

$\mathcal{S}_\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$

$\mathcal{S}_\mathcal{X}$ generiše $\mathcal{X}$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{X} = \operatorname{span} \mathcal{S}_\mathcal{X} = \{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \mid \alpha_i \in \mathbb{F}\}$

$\mathcal{S}_\mathcal{Y}$ generiše $\mathcal{Y}$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{Y} = \operatorname{span} \mathcal{S}_\mathcal{Y} = \{\sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j \mid \beta_j \in \mathbb{F}\}$

Trebamo pokazati da $\operatorname{span}(\mathcal{S}_\mathcal{X} \cup \mathcal{S}_\mathcal{Y}) = \mathcal{X}+\mathcal{Y}$

Izaberimo proizvoljno $z \in \operatorname{span}(\mathcal{S}_\mathcal{X} \cup \mathcal{S}_\mathcal{Y})$

$z \in \operatorname{span}(\mathcal{S}_\mathcal{X} \cup \mathcal{S}_\mathcal{Y}) \Leftrightarrow z \in \operatorname{span}\{x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n\}$

$\Leftrightarrow \exists \gamma_i \in \mathbb{F}\ (1 \le i \le m)\ \exists \delta_j \in \mathbb{F}\ (1 \le j \le n)$ t.d.

$$z = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_m x_m + \delta_1 y_1 + \delta_2 y_2 + \dots + \delta_n y_n$$

$\Leftrightarrow$ $z = x + y$ gdje $x = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i x_i$ i $y = \sum_{j=1}^{n} \delta_j y_j$ $\gamma_i, \delta_j \in \mathbb{F}$

$\Leftrightarrow$ $z = x + y$ gdje $x \in \operatorname{span} \mathcal{S}_\mathcal{X}$ i $y \in \operatorname{span} \mathcal{S}_\mathcal{Y}$

$\Leftrightarrow$ $z = x + y$ gdje $x \in \mathcal{X}$ i $y \in \mathcal{Y}$

Prema tome

$z \in \operatorname{span}(\mathcal{S}_\mathcal{X} \cup \mathcal{S}_\mathcal{Y}) \Leftrightarrow z = x+y$ gdje $x \in \mathcal{X}$ i $y \in \mathcal{Y}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{S}_\mathcal{X} \cup \mathcal{S}_\mathcal{Y}$ generiše $\mathcal{X}+\mathcal{Y}$

(#) Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ dva podprostora vektorskog prostora $\mathcal{V}$.

a) Dokazati da je presjek $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ također podprostor od $\mathcal{V}$.

b) Pokazati da unija $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ nemora biti podprostor od $\mathcal{V}$.

Rj.

a) $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ će biti podprostor vektorskog prostora $\mathcal{V}$ akko su zadovoljene sljedeće dvije aksiome

(A1) $x, y \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \Rightarrow x + y \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$.

(M1) $x \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \Rightarrow \alpha x \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}$.

(A1)

$$x, y \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \Rightarrow x \in \mathcal{X} \text{ i } x \in \mathcal{Y} \\ y \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \Rightarrow y \in \mathcal{X} \text{ i } y \in \mathcal{Y} \end{array}\right\} \Rightarrow x, y \in \mathcal{X} \text{ i } x, y \in \mathcal{Y}$$

$\Rightarrow x + y \in \mathcal{X}$ i $x + y \in \mathcal{Y}$ (Zašto?) $\Rightarrow x + y \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$

(M1)

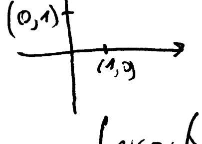
$x \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \Rightarrow x \in \mathcal{X}$ i $x \in \mathcal{Y} \overset{\forall \alpha \in \mathbb{F}}{\Rightarrow} \alpha x \in \mathcal{X}$ i $\alpha x \in \mathcal{Y}$ (Zašto?)

$\Rightarrow \alpha x \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$

$\mathcal{X}$ vekt. podpr.
$\mathcal{Y}$ vekt. podpr.

$\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ jest podprostor od $\mathcal{V}$.

b) Da bi pokazali da $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ ne mora biti podprostor od $\mathcal{V}$, pronađimo konkretne primjere za $\mathcal{V}$, $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ u kojima npr. aksiom (A1) nije zadovoljena



$\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$

Znamo da su x-osa i y-osa podprostori vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{array}{l} u = (1,0) \in \mathcal{X} = \{x\text{-osa}\} \\ v = (0,1) \in \mathcal{Y} = \{y\text{-osa}\} \end{array}\right. \Rightarrow u + v = (1,1) \notin \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$$

$\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{X} = \{xOy \text{ ravan}\}$, $\mathcal{Y} = \{xOz \text{ ravan}\}$

$$\left.\begin{array}{l} u = (0,1,0) \in \mathcal{X} \\ v = (1,0,1) \in \mathcal{Y} \end{array}\right. \Rightarrow u + v = (1,1,1) \notin \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$$

(#) Neka je $\mathcal{S}$ neprazan podskup vektorskog prostora $\mathcal{V}$. Pokazati da ako $\mathcal{S}$ zadovoljava sljedeće dvije osobine

(A1) $x, y \in \mathcal{S} \Rightarrow x+y \in \mathcal{S}$

(M1) $x \in \mathcal{S} \Rightarrow \alpha x \in \mathcal{S}$ za svako $\alpha \in \mathbb{F}$

tada je $\mathcal{S}$ vektorski prostor ($\mathbb{F}$ je skup realnih ili kompleksnih brojeva).

Rj.

Trebamo pokazati da $\mathcal{S}$ zadovoljava sve osobine iz definicije vektorskog prostora.

(A1) $x+y \in \mathcal{S}$ za $\forall x, y \in \mathcal{S}$

ova osobina je zadovoljena iz pretpostavke zadatka

(A2) $(x+y)+z = x+(y+z) \quad \forall x, y, z \in \mathcal{S}$

Kako je $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ ova osobina je naslijeđena iz $\mathcal{V}$

(A3) $\exists\, 0 \in \mathcal{S}$ t.d. $x+0 = x \quad \forall x \in \mathcal{S}$

(A4) $\forall x \in \mathcal{S} \quad \exists (-x) \in \mathcal{S}$ t.d. $x+(-x) = 0$.

Za $\mathcal{V}$ već znamo da je $0 \in \mathcal{V}$ neutralni element i da je $-x$ inverzni za $\forall x \in \mathcal{V}$. Pokažimo da je $0 \in \mathcal{S}$ i da je $-x \in \mathcal{S}$

Znamo da $x \in \mathcal{S} \Rightarrow \alpha x \in \mathcal{S}$ za $\forall \alpha \in \mathbb{F}$

pa ako za α uzmemo -1 imamo

$$-x = (-1)x \in \mathcal{S} \quad \text{tj.} \quad -x \in \mathcal{S}$$ (time je A4 zadovoljeno)

Kako $x, y \in \mathcal{S} \Rightarrow x+y \in \mathcal{S}$ to je $x+(-x) \in \mathcal{S}$ tj. $0 \in \mathcal{S}$

(ovim je A3 zadovoljeno

(A5) $x+y = y+x \quad \forall x, y \in \mathcal{S}$

Ova osobina, kao i osobine (M2), (M3), (M4) i (M5) su naslijeđene iz vektorskog prostora $\mathcal{V}$ ($\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$).

(M1) $x \in \mathcal{S} \Rightarrow \alpha x \in \mathcal{S} \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}$

ova osobina je zadovoljena na osnovu pretpostavke zadatka

Prema tome $\mathcal{S}$ jest vektorski prostor

Zadaci za vježbu

1. Ako je $\mathcal{X}$ ravan koja prolazi kroz koordinatni početak u $\mathbb{R}^3$ i $\mathcal{Y}$ prava koja prolazi kroz koordinatni početak i okomita je na $\mathcal{X}$, šta predstavlja $\mathcal{X}+\mathcal{Y}$?

2. U $\mathbb{R}^3$ skicirati slike podprostora koji su generisani sledećim skupovima
(a) $\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-9\\-6\end{pmatrix}\right\}$, (b) $\left\{\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, (c) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

3. Sa uobičajenim sabiranjem i množenjem, odrediti da li su sledeći skupovi vektorski prostori nad poljem $\mathbb{R}$.
(a) $\mathbb{R}$, (b) $\mathbb{C}$, (c) $\mathbb{Q}$ (racionalni brojevi).

4. Neka su $\mathcal{M}=\{m_1, m_2, \ldots, m_r\}$ i $\mathcal{N}=\{m_1, m_2, \ldots, m_r, v\}$ dva skupa vektora iz istog vektorskog prostora. Dokazati da $span(\mathcal{M})=span(\mathcal{N})$ ako i samo ako $v\in span(\mathcal{M})$.

5. Za skup vektora $\mathcal{S}=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dokazati da je $span(\mathcal{S})$ presjek svih podprostora koji sadrže $\mathcal{S}$.
uputa: za $\mathcal{M}=\bigcap_{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{V}}\mathcal{S}$ dokazati da je $span(\mathcal{S})\subseteq\mathcal{M}$ i da je $\mathcal{M}\subseteq span(\mathcal{S})$.